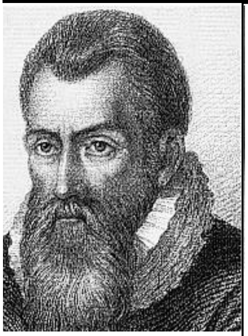
TD : Introduction au cours sur la fonction logarithme

I - introduction aux logarithmes , approche historique par les tables

***a*-Des tables de NEPER aux calculatrices : technique pour transformer des produits en sommes** *(contrairement à la fonction exponentielle)*



A la fin du XVIème siècle , le développement de l' astronomie, de la navigation , du commerce, …, obligent les intéressés à de longs et pénibles calculs. Or il est plus facile d'additionner que de multiplier ! Faisant ce constat, John NEPER , mathématicien écossais (1550-1617) a mis au point une correspondance s'appuyant sur l'échange d'une suite géométrique $(1, a , a^2, a^3, \dots , a^p ,\dots, a^q , \dots)$ en une suite arithmétique (0 , 1 , 2 , 3 , … , p , ..., q , …) à l'aide de la formule $a^p \times a^q = a^{p+q}$.

Il a ainsi proposé une liaison fonctionnelle transformant un produit de deux nombres « quelconques » en une somme de deux autres nombres : en notation moderne $N(a \times b) = N(a) + N(b)$. Cette liaison a été appelée logarithme (du grec *logos*, rapport, et *arithmos*, nombre). En 1614, il a publié une table de logarithmes à sept décimales, sous le titre « Description des merveilleuses règles des logarithmes ». Cette table et celle du mathématicien anglais BRIGGS (1624) ont facilité le calcul mathématique. Le règne de ces tables s'est achevé avec l'arrivée des ordinateurs et des calculatrices électroniques.

Compléter ci dessous, les formules utilisées dans les tables à l'aide de la relation fonctionnelle « log » du texte ci dessus et des résultats obtenus au brouillon avec les touches $\boxed{\ln}$: logarithme népérien et $\boxed{\log}$: logarithme décimal de la calculatrice.

$\log (a\times b) = \log(a) + \log(b)$, $\log (1) = 0$, $\log \left(\frac{1}{a} \right) = - \log(a)$, $\log \left(\frac{a}{b} \right) = \log(a) - \log(b)$, $\log (a^n) = n \times \log(a)$, $\log (\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \log(a)$

(*ces formules seront démontrées soigneusement dans le cours après définition de la « fonction » logarithme*)

Trouver la relation entre $\boxed{\ln}$ et $\boxed{\log}$: relation de proportionalité : $\log (a) = \frac{\ln a}{\ln 10}$

***b*- Utilisation des tables de logarithmes** (celles qu'utilisaient nos « aïeux » qui n'avaient pas de calculatrices de poche !)

A l'aide de la table des logarithmes « Bouvart et Ratinet » et des formules, calculer : $\frac{\sqrt{184,5}\times 2,183}{3,14}$

$\log\left(\frac{\sqrt{184,5}\times 2,183}{3,14} \right) = \log\sqrt{184,5} + \log (2,183) - \log (3,14) = ½ \times \log (1,845\times 10^2)+\log (2,183) - \log(3,14)$

$= ½ \times(\log (1,845) + 2)+\log (2,183) - \log(3,14) = ½ \times (0,26600 + 2) + 0,33905 – 0,49693$

$= 0,97512$

donc $\frac{\sqrt{184,5}\times 2,183}{3,14} \approx 9,443$ par lecture contraire (vérifier avec la calculatrice)

***c*-Utilisation de la « règle à calcul »** (on obtient le résultat par déplacement des réglettes)

d-Méthode de BRIGGS pour construire la table des logarithmes décimaux (voir TD qui suit : étude d'un algorithme)

Partie A : travail sur les suites arithmétiques et géométriques .

1) **Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 0,2 et de premier terme $U_0 = 1$.**

a) **Compléter le tableau suivant , puis donner la relation de récurrence entre deux termes consécutifs (c'est à dire la relation entre U_{n+1} et U_n) et la relation entre un terme U_n et son rang n (relation explicite)**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U_n	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5

* $U_{n+1} = U_n + 0,2$ * $U_n = U_0 + n \times 0,2 = 1 + 0,2n$ (croissance affine)

b) **Exprimer par une formule mathématique contenant les notations U_{n-1} , U_n et U_{n+1} qu' « un terme quelconque d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique du terme précédent et du terme suivant » , vérifier cette formule avec U_{16} en utilisant U_{15} et U_{17} , puis démontrer cette formule.**

* $U_n = \frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2}$, * $\frac{U_{15}+U_{17}}{2} = \frac{4+4,4}{2} = 4,2 = U_{16}$

démonstration : d'après la relation de récurrence , pour tout entier n ,

$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 0,2 \\ U_n = U_{n-1} + 0,2 \end{cases}$ $\begin{cases} U_n = U_{n+1} - 0,2 \\ U_n = U_{n-1} + 0,2 \end{cases}$ donc $2U_n = U_{n+1} + U_{n-1}$ donc $U_n = \frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2}$

2) **Même travail avec la suite géométrique (V_n) de raison 1,05 et de premier terme $V_0= 1$**

a) **Compléter le tableau suivant puis donner la relation de récurrence entre deux termes consécutifs et la relation entre un terme V_n et son rang n**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V_n	1	1,05	1,10	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41	1,48	1,55	1,63	1,71	1,80	1,89	1,98	2,08

* $V_{n+1} = q \times V_n$ * $V_n = V_0 \times q^n = 1{,}05^{\,n}$ (croissance exponentielle)

b) Exprimer par une formule mathématique contenant les notations V_{n-1} , V_n et V_{n+1} qu' « un terme quelconque d'une suite géométrique est la moyenne géométrique du terme précédent et du terme suivant » (rechercher la définition de la moyenne géométrique de deux nombres et son interprétation géométrique) , vérifier cette formule avec V_{14} en utilisant V_{13} et V_{15} , puis démontrer cette formule.

* $V_n = \sqrt{V_{n-1} \times V_n}$

*

démonstration :

pour tout entier n ,

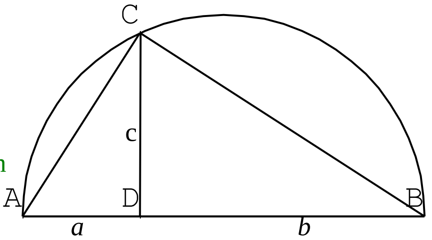
$V_n = q \times V_{n-1}$ $V_n = q \times V_{n-1}$

$V_{n+1} = q \times V_n$ $V_n = \dfrac{V_{n+1}}{q}$

Donc $V_n^2 = q \times V_{n-1} \times \dfrac{V_{n+1}}{q} = V_{n-1} \times V_{n+1}$

Donc $V_n = \sqrt{V_{n-1} \times V_n}$

On trace le cercle de diamètre $a+b$ selon la figure ci-dessous et ses notations alors la longueur CD est égale à $\sqrt{ab}$.



Démonstration :
ABC est inscrit dans un cercle avec [AB] pour diamètre donc ABC est rectangle en C. De plus par construction (CD) ⊥ (AB), donc en utilisant les propriétés des angles complémentaires on obtient que les deux triangles ADC et CBD sont semblables car ils ont deux angles deux à deux égaux.

On en déduit que $\dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c}$ donc c² = ab donc c = $\sqrt{ab}$

Cas particulier : $\sqrt{1{,}05^{13} \times 1{,}05^{15}} = \sqrt{1{,}05^{13+15}} = \sqrt{1{,}05^{2\times 14}} = (\sqrt{1{,}05^{14}})^2 = 1{,}05^{14} = V_{14}$

Partie B : principe des tables de logarithmes

Pour simplifier les calculs , les savants ont cherché à construire des tables numériques à deux colonnes , mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.

1) Etude de la table n°2 en utilisant la correspondance annoncée dans le texte : Vérifier que l'on peut obtenir la ligne du 12 avec les résultats des lignes du 3 et du 4 , puis à l'aide des valeurs fournies compléter les trois dernières lignes.

Exemples

Table n°1 :

	1	0	
×10	10	1	+1
×10	100	2	+1
×10	1000	3	+1
	10^n	n	
	$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$	n+p	

Table n° 2

1	0
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	1,94591
8	2,07944
9	2,19722
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	2,89037
19	2,94444
20	2,99573
21	
22	
100	

2) ***Pour désigner les nombres de la colonne de droite, on inventa le mot « logarithme » , forgé à partir des deux mots grecs « logos » (rapport) et « arithmos » (nombre entier naturel) : en effet si les nombres de gauche sont dans un rapport constant (c'est à dire en progression géométrique) , alors ceux de droite sont à différence constante (c'est à dire en progression arithmétique) .***

a) Vérifier cette propriété sur la table 2 en surlignant les lignes correspondant à la suite géométrique 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , … dans la colonne de gauche et en calculant les différences correspondantes dans la colonne de droite . (on placera des flèches comme sur la table n°1) .

b) **Etude du texte suivant : Méthode de BRIGGS pour construire la table des logarithmes décimaux (cette table fut publiée en 1624 et la méthode est racontée par Euler en 1748) :**

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, et proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 et 10, dont les logarithmes sont 0 et 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, et on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.

Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver $Z = 5{,}000\,000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698 970, en supposant la base logarithmique $=10$. Par conséquent $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à-peu-près. C'est de cette manière que Briggs et Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

		soit
A = 1,000 000;	lA = 0,000 000 0;	
B = 10,000 000;	lB = 1,000 000 0;	$C = \sqrt{AB}$
C = 3,162 277;	lC = 0,500 000 0;	$D = \sqrt{BC}$
D = 5,623 413;	lD = 0,750 000 0;	$E = \sqrt{CD}$
E = 4,216 964;	lE = 0,625 000 0;	$F = \sqrt{DE}$
F = 4,869 674;	lF = 0,687 500 0;	$G = \sqrt{DF}$
G = 5,232 991;	lG = 0,718 750 0;	$H = \sqrt{FG}$
H = 5,048 065;	lH = 0,703 125 0;	$I = \sqrt{FH}$
I = 4,958 069;	lI = 0,695 312 5;	$K = \sqrt{HI}$
K = 5,002 865;	lK = 0,699 218 7;	$L = \sqrt{IK}$
L = 4,980 416;	lL = 0,697 265 6;	$M = \sqrt{KL}$
M = 4,991 627;	lM = 0,698 242 1;	$N = \sqrt{KM}$
N = 4,997 242;	lN = 0,698 730 4;	$O = \sqrt{KN}$
O = 5,000 052;	lO = 0,698 974 5;	$P = \sqrt{NO}$
P = 4,998 647;	lP = 0,698 852 5;	$Q = \sqrt{OP}$
Q = 4,999 350;	lQ = 0,698 913 5;	$R = \sqrt{OQ}$
R = 4,999 701;	lR = 0,698 944 0;	$S = \sqrt{OR}$
S = 4,999 876;	lS = 0,698 959 2;	$T = \sqrt{OS}$
T = 4,999 963;	lT = 0,698 966 8;	$V = \sqrt{OT}$
V = 5,000 008;	lV = 0,698 970 7;	$W = \sqrt{TV}$
W = 4,999 984;	lW = 0,698 968 7;	$X = \sqrt{WV}$
X = 4,999 997;	lX = 0,698 969 7;	$Y = \sqrt{VX}$
Y = 5,000 003;	lY = 0,698 970 2;	$Z = \sqrt{XY}$
Z = 5,000 000;	lZ = 0,698 970 0;	

<u>Explication de la Méthode :</u>

on fait correspondre la moyenne géométrique de deux nombres de la colonne de gauche avec la moyenne arithmétique des deux nombres correspondants dans la colonne de droite de façon à s'approcher au plus près du résultat voulu (voir la partie A).

- **Avec ce procédé, donner le calcul qui a permis d'obtenir le nombre C = 3,162 277 puis le calcul qui a permis d'obtenir le nombre de la colonne de droite *l*C = 0,5 . (les savants de l'époque savaient « extraire des racines carrées » !)**

C = $\sqrt{1\times10} \approx 3{,}16227766$ lC = $\frac{0+1}{2} = 0{,}5000000$

- **L'objectif étant de trouver le « logarithme » de 5 , pourquoi a t'on choisi pour l'étape suivante D = $\sqrt{BC}$? vérifier le calcul avec la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ calculatrice.** B □ 5 □ C donc on choisit D = $\sqrt{BC} = \sqrt{10\times3{,}162277} \approx 5{,}6234126$ donc lD = $\frac{1+0{,}5}{2} = 0{,}75$

- **Vérifier tous les calculs de la table (en utilisant la calculatrice pour déterminer les racines carrées !!), puis expliquer le résultat du texte : « $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près »**

On a à peu près log 5 ≈ $\frac{69897}{100000}$, or dans la première colonne on a « 10^x », et dans la deuxième colonne « x » (voir le tableau 1) , donc $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à peu près

- **Compléter la table n°4 ci-contre avec le même procédé que ci dessus pour obtenir une approximation du « logarithme » de 6 . Ecrire un algorithme résumant ce procédé et le faire fonctionner en programmant la calculatrice (test et boucle).**

X	log X
1	0
10	1
3,16227766	0,5
5,62341325	0,75
7,49894209	0,875
6,49381632	0,8125
6,0429639	0,78125
5,82941535	0,765625
5,93522927	0,7734375
5,98885433	0,77734375
6,01584828	0,77929688
6,00233613	0,77832031
5,99559145	0,77783203
5,99896284	0,77807617
6,00064925	0,77819824
5,99980599	0,77813721
6,0002276	0,77816772
6,00001679	0,77815247
5,99991139	0,77814484
5,99996409	0,77814865
5,99999044	0,77815056
6,00000362	0,77815151
5,99999703	0,77815104
6,00000032	0,77815127
5,99999868	0,77815115

<u>TI</u>

```
PROGRAM : LOGBRIG
: INPUT « LOG(X),X= », X
: 1→ A
: 10 → B
: 0 → C
: 1 → D
: LBL A
: √ (A×B) → R
: (C+D) / 2 → S
: DISP «  X= » ,R
: DISP « LOG(X) = », S
: PAUSE
:IF X < R
: THEN
: R → B
: S → D
: ELSE
: R→ A
: S → C
: END
: GOTO A
:RETURN
```

Casio

```
« logX, X= »
?→X

«  X= » : R◢
« LOG(X) = » :
S◢
( pas de pause )

IFEND

(Pas de return)
```

<u>Algorithme</u> :

déclaration

X un nombre réel compris entre 1 et 10

A, B , C , D , R , S des nombres réels

Afficher : « logX, pour X= » *question à poser pour $1 \le X \le 10$*

X ← résultat

Entrer les valeurs de départ :

A ← 1 *A sera la valeur inférieure la plus proche de X*

B ← 10 *B sera la valeur supérieure la plus proche de X*

*l*A ← 0 *A et B dans la première colonne*

*l*B ← 1 *lA et lB correspondant dans la deuxième colonne respectivement à logarithme de A et B*

Faire

R ← $\sqrt{AB}$ *calcul moyenne géométrique première colonne*

S ← $\frac{lA+lB}{2}$ *calcul moyenne arithmétique deuxième colonne*

Afficher « X= » , R

« log X = » , S *afficher les étapes du tableau*

Si X < R faire :

B ← R

*l*B ← S

Sinon faire :

A ← R

*l*A ← S

Fin du Si

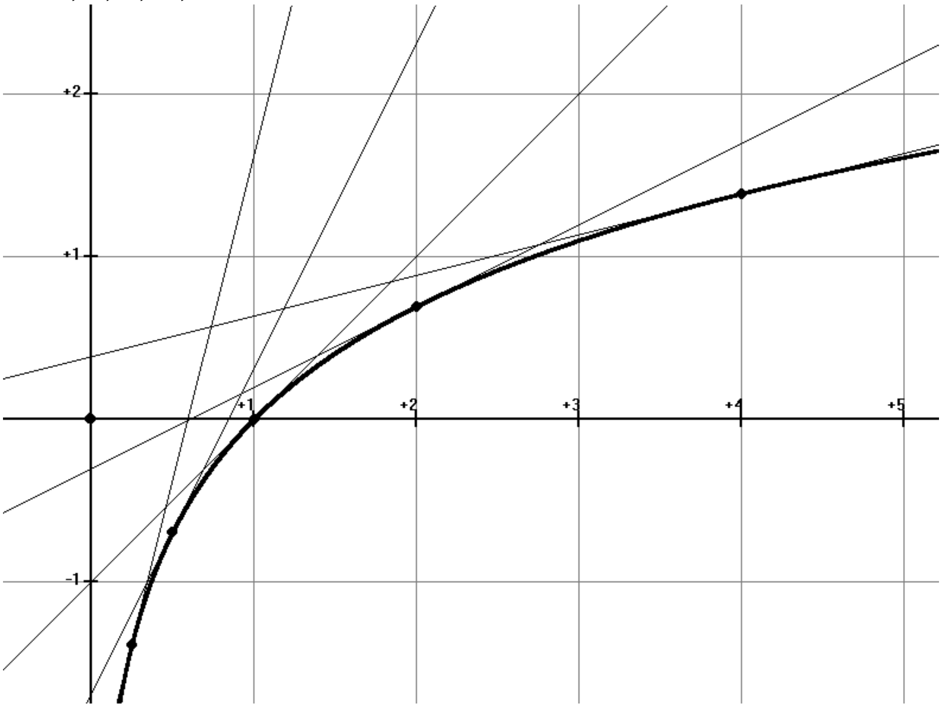
Retour

II: Introduction à la fonction logarithme népérien , approche fonctionnelle

***a* -Courbe représentant la fonction ln , conjecture sur la dérivée.**

1-Tracer la courbe à l'écran de la calculatrice sur l'intervalle [0,25 ; 5]

2-Sur le graphique ci-dessous on a représenté la courbe représentant la fonction ln sur [0,25 ; 5] et ses tangentes aux points d'abscisses 1 ; 2 ; 4 ; ½ ; ¼ .



Déterminer graphiquement les nombres dérivés suivants :

$f'(1) \approx 1$

$f'(2) \approx 0{,}5$

$f'(4) \approx 0{,}25$

$f'(\frac{1}{2}) \approx 2$

$f'(\frac{1}{4}) \approx 4$

rappel de la propriété utilisée : *f' (x) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x*

Conjecturer sur l'expression de la fonction dérivée de la fonction ln.

ln' est la fonction inverse : $x \to \frac{1}{x}$

Remarque : par définition , on dira que la fonction ln est une **primitive** de la fonction inverse : $x \alpha \ \frac{1}{x}$ sur] 0,+ ∞ [et la méthode d'Euler permettrait une construction approchée de la courbe.

Voir animation

Question à méditer : Qu'y a – t – il dans la calculatrice : des tables améliorées ou une fonction ?

***b*-Recherche des fonctions *f* définies et dérivables sur] 0,+ ∞ [telles que *f* (*xy*) = *f* (*x*) + *f* (*y*)** : activité 2 page 144-145
(lien avec le I : on recherche toutes les fonctions qui transforment les produits en sommes)

2 Une relation fonctionnelle caractéristique

info

On admet qu'il existe une unique fonction, notée ln, définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, telle que $\ln(1)=0$ et, pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.
Cette propriété est établie page 262.

Problème

Existe-t-il des fonctions f définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ telles que, pour tous réels x et y strictement positifs, $f(xy)=f(x)+f(y)$?

1. Des conditions nécessaires

On suppose qu'une fonction f est solution du problème.

a) Démontrer que $f(1)=0$.

b) a est un réel strictement positif fixé et g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=f(ax)$.
Démontrer que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $g'(x)$ de deux façons différentes.

c) En déduire que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\frac{k}{x}$, où $k=f'(1)$.

d) Démontrer alors que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=k\ln(x)$.

2. Étude de la réciproque

a) a est un réel strictement positif et h est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\ln(ax)$.
Démontrer que h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $h'(x)=\frac{1}{x}$.
En déduire que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $\ln(ax)=\ln(x)+\ln(a)$.

b) Démontrer que toute fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=k\ln(x)$, où k est un réel, est solution du problème.

Conclusion

Les solutions du problème sont les fonctions f définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=k\ln(x)$, où k est un nombre réel quelconque.

1) **Conditions nécessaires : On suppose *f* définie et dérivable sur] 0, +∞ [, vérifiant *f* (*xy*) = *f* (*x*) + *f* (*y*)**

a) **pour $x=1$, $f(1)=2f(1)$ donc $f(1)=0$**

b) **pour tout $a>0$ et pour tout $x>0$, On pose $g(x)=f(ax)$, g est définie et dérivable sur] 0 , +∞ [, on a aussi $g(x)=f(x)+f(a)$**
et on a d'une part : $g'(x)=f'(ax)\times a$
et d'autre part : $g'(x)=f'(x)+0=f'(x)$

c) **des deux égalités précentes , on obtient : $f'(ax)\times a=f'(x)$ pour tous réels x et a strictement positifs.**

Pour $x=1$, on obtient $f'(a)\times a=f'(1)$ donc $f'(a)=\frac{f'(1)}{a}$

donc f vérifie pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{k}{x}$ avec $k=f'(1)$

d) **d'après l'info prérequise, il existe une unique fonction ln définie et dérivable sur] 0 , +∞ [vérifiant $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ et $\ln 1=0$**

or la fonction $\frac{f}{k}$ vérifie elle aussi ces conditions donc $\frac{f}{k}=\ln$ donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f(x)=k\ln(x)$

2- étude de la réciproque (prouvons que k×ln vérifie la propriété *f* (*xy*) = *f* (*x*) + *f* (*y*))

a) **pour tous les réels a et x strictement positifs, on pose $h(x)=\ln(ax)$, h est dérivable sur] 0 , +∞ [et $h'(x)=\frac{1}{ax}\times a=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$**

étudions la fonction g définiesur] 0 , +∞ [par $g(x)=h(x)-\ln(x)$, g est dérivable sur] 0 , +∞ [et $g'(x)=h'(x)-\frac{1}{x}=0$

donc la fonction g est constante sur] 0, + ∞ [et $g(1)=\ln(a\times 1)=\ln a$
donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $g(x)=\ln a$
donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $h(x)-\ln(x)=\ln a$
donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $h(x)=\ln(x)+\ln a$
donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ et tout réel a strictement positif, $\ln(ax)=\ln(x)+\ln a$
donc la fonction ln définie dans l' « info » est solution du problème.

b) **de plus , en posant $f(x)=k\ln x$, on a d'après ce qui précède : $f(xy)=k\ln(xy)=k(\ln x+\ln y)=k\ln x+k\ln y=f(x)+f(y)$**
donc f est aussi solution du problème.

Conclusion : Les solutions du problème sont les fonctions définies sur] 0 , +∞ [par *f* (*x*) = k ln(*x*) , où k est un nombre réel quelconque.

***c*- historiquement , on retrouve une troisième approche avec le problème de « quarrer l'hyperbole » : voir chapitre fin d'année sur les intégrales.**