TD 1S3 Etude et comparaison d'algorithmes année 2012-2013

Partie I :

Dans cet exercice, k et n sont deux entiers.

On appelle **liste** un couple de deux entiers n et k sans importance d'ordre (la liste {n,k} est identique à la liste {k,n})

1. On donne l'algorithme suivant :

```
c prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à 5
        Pour n variant de 0 à 5
                c prend la valeur c + 1
                Si k^2 + n^2 ≤ 25
                Alors
                    afficher la liste {k,n}
                Fin du Si
        Fin du Pour
Fin du pour
afficher c
```

a. Parmi les listes suivantes, dire lesquelles sont affichées par cet algorithme (barrer ceux qui ne conviennent pas):

{1 ; 4} {3 ; 4} {4 ; 4} {4 ; 0}

b. Quelle est la valeur de c affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

C compte le nombre de boucles faites pour chaque k et chaque n, donc 6x6 = 36 boucles car 6 possibilités de 0 à 5 pour chacun k puis 6 possibilités pour n. Donc la valeur de c affichée est c= 36.

On retrouve graphiquement ce résultat en considérant les points à coordonnées entières dans un carré de côté 5.

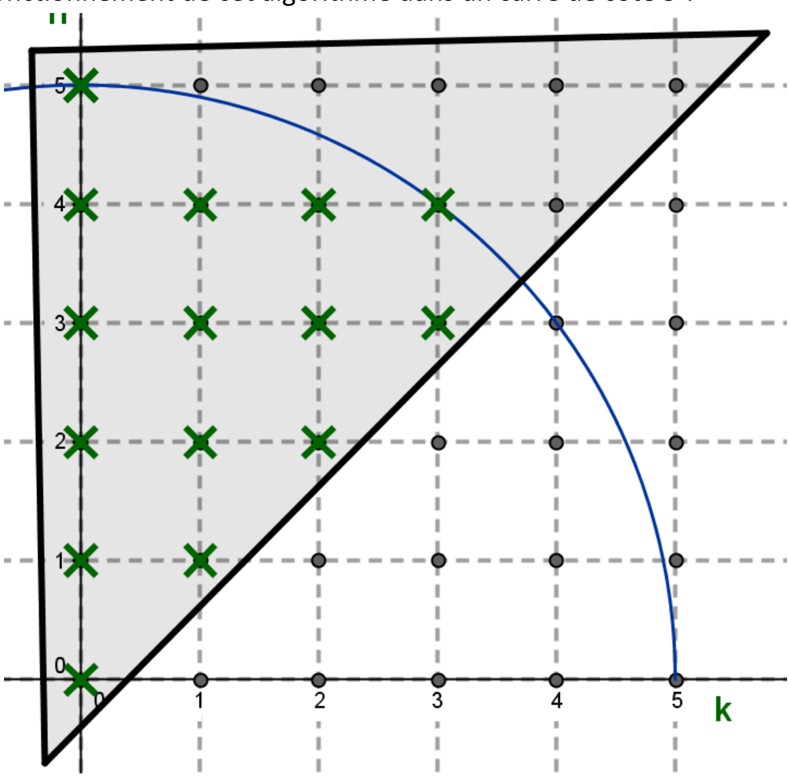
c. Comment modifier la ligne 3 pour ne pas faire apparaître la même liste deux fois ?

Modification ligne 3 : Pour n variant de k à 5, (il est inutiles de garder les valeurs de n inférieure à k car les listes ont déjà été comptabilisées dans les boucles précédentes)

En effet , graphiquement il suffit de garder les points au dessus ou sur la diagonale.

2. Comment interpréter graphiquement le fonctionnement de cet algorithme dans un carré de côté 5 ?

Le test « si $k^2 + n^2 \leq 25$ » teste graphiquement si un point de coordonnées (k ; n) appartient ou non au cercle de centre 0 et de rayon 5.



Partie 2

1. On se place désormais dans un repère orthormé d'origine O , avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
   A l'aide de l'équation du cercle de centre O et rayon 5, exprimer l'ordonnée d'un point du quart de cercle en fonction de son abscisse.

   M(x ;y) appartient au cercle de centre O et de rayon 5 $\Leftrightarrow$ OM = 5
   $\Leftrightarrow OM^2 = 25$
   $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$
   $\Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2$

   Puisque de plus $x \geq 0$ et $y \geq 0$,
   M est dans le quart du cercle supérieur droit $\Leftrightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

2. Soit la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
   a. Justifier le fait que $25 - x^2$ est positif sur cet intervalle.

   $25 - x^2$ est un trinôme avec deux racines évidentes : -5 et 5 avec a négatif, donc $25 - x^2$ est positif sur [0 , 5]

x	$-\infty$ -5 5 $+\infty$
$25-x^2$	- 0 + 0 -

   b. Construire le tableau de variations de f sur [0 ; 5].

   $25 - x^2$ est un trinôme avec pour sommet de la parabole : le point d'abscisse 0 et a négatif (parabole tournée vers le bas).

   D'après le cours u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations donc :

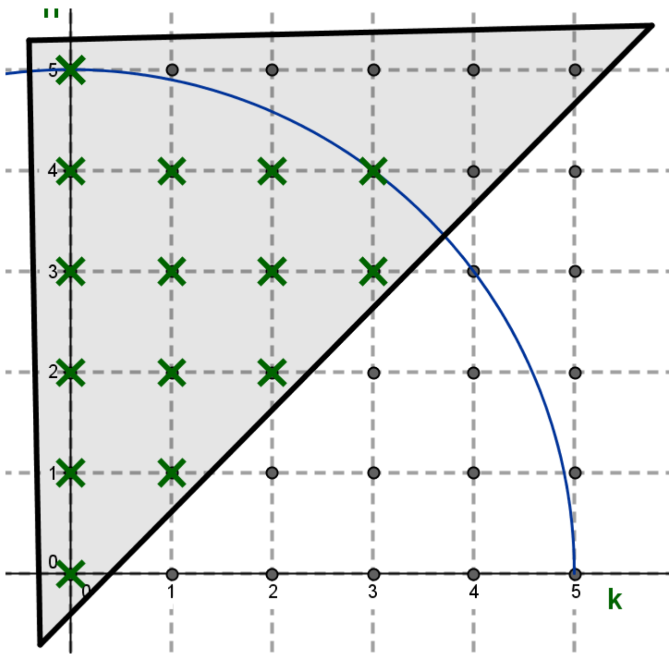
x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$25-x^2$	↗ ↘

x	0 5
$25-x^2$	25 ↘ 0
$f(x)=\sqrt{25-x^2}$	5 ↘ 0

3. On donne ci-dessous, la courbe d'équation $y = \sqrt{25 - x^2}$. Ecrire sur le graphique toutes les listes affichées par l'algorithme donné au début du TD. Combien y en a-t-il? Combien y en t-il de différents ?

25 listes affichées avec le premier algorithme : 25
15 listes différentes

{ 0 ; 0 } , { 0 ; 1 } ; …



Partie 3

1- Pour k entier variant de 0 à 5 , déduire de l'étude précédente dans quel intervalle doit varier l'entier n vérifiant à la fois la condition : $k^2 + n^2 \leq 25$ et la condition de ne pas compter deux fois les listes identiques.

n varie de k à $\sqrt{25-k^2}$

2- Construire un algorithme permettant d'afficher les listes de nombres entiers { k ; n } vérifiant la propriété suivante: $k^2 + n^2 \leq 25$ sans utiliser la condition SI .

```
c prend la valeur 0
Pour k variant de 0 à 5
    Pour n variant de k à √(25−k²)
        afficher la liste {k,n}
    Fin du Pour
Fin du pour
afficher c
```

remarque : dans la programmation avec les trois logiciels ci-dessous le « partie entière » : E ($\sqrt{25-k^2}$) n'a pas été nécessaire, donc je ne l'ai pas envisagé avec les élèves)

3- Programmer les deux algorithmes précédents(partie 1 avec modification ligne 3 et celui ci-dessus), sur calculatrice, puis sur le logiciel « ALGOBOX » , puis sur le logiciel Xcas (s'aider du manuel) .

Sur TI

```
PROGRAM : IREMSOB1
: 0→C
:For(K,0,5)
:For(N,0,5)
:C+1→C
:If K²+N²≤25
:Disp ".",K,N
:Pause
:End
:End
:Disp « C= »,C
```

Sur TI

```
PROGRAM : IREMSOB2
: 0→C
:For(K,0,5)
: √(25−k²) →R
:For(N,K,R)
:C+1→C
:Disp ".",K,N
:Pause
:End
:End
:Disp « C= »,C
```

Remarque : pour un début d'année, je n'ai pas utilisé les listes de la calculatrice.

4- Comparaison des deux algorithmes (ouverture):

« le deuxième algorithme permet une économie du nombre d'étapes (boucles) mais demande des calculs plus compliqués (racine carrée) »:

On teste à l'aide du logiciel Python la rapidité des deux algorithmes (l'un par balayage , l'autre par description) … les calculs sont si rapides que l'on fait une étude plus générale avec un quart de cercle de grand rayon … les résultats sont vidéoprojetés (fichier joint)

On constate expérimentalement que c'est le deuxième algorithme sans les tests avec moins de boucles qui est plus rapide. L'explication est à chercher auprès d'informaticiens ……… !!!!