TD 15 : Intégration

Objectifs : Savoir calculer une intégrale - à l'aide d'une primitive
- à l'aide du théorème d'intégration par parties.

Savoir déterminer une primitive à l'aide d'une intégrale.

Savoir étudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale.

Savoir calculer une aire, un volume.

Suite et Intégrale.

Enoncé 1 : Calculs d'intégrales.

Avec primitives : Voir **ex n° 51(a, d) ; 55(d) ; 56 et 57 du livre p. 235**

Par intégration par parties : Voir **ex n° 62(a) et 63(a) du livre p. 235**

Enoncé 2 : Primitive définie à l'aide d'une intégrale.

1. Calculer $\int_2^x t^2 \ln(t)dt$; en déduire la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x)$ qui s'annule en 2.
2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (2x+1)e^x$ qui s'annule en 2.

Enoncé 3 : Intégrale et encadrement.

1. Sans les calculer, donner le signe des intégrales suivantes :

   a) $\int_2^5 \sqrt{x-1}dx$ b) $\int_{-1}^{-3} \sqrt{3-t}dt$ c) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2-x}dx$

2. a) Démontrer que, pour tout réel t de $[0,1]$: $\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$

   b) En déduire un encadrement de $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt$

3. A l'aide des inégalités de la moyenne, obtenir un encadrement des intégrales suivantes :

   a) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln(x)dx$ b) $\int_{4,9}^{5,1} x^2 dx$ c) $\int_{-5}^{-4} x^2 dx$

Enoncé 4 : Fonction définie par une intégrale.

Soit G la fonction définie sur l'intervalle [1 ;3] par $G(x) = \int_1^x \frac{1}{2+\cos t}dt$.

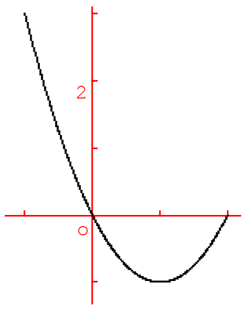
Prouver que G est dérivable sur [1 ;3] et calculer sa dérivée.

Enoncé 5 : Calcul d'aire ;

On considère la fonction f définie sur [-1 ; 2] par $f(x) = x(x-2)$.

La représentation graphique $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-contre dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm (le dessin n'est pas à l'échelle).

1. Etudier le signe de f sur [-1 ; 2]
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$, en cm^2.



Enoncé 6 : Calcul de volume : voir exercice du cours

Enoncé 7 : Suite d'intégrales.

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$

1. Etudier le sens de variation de (I_n).
2. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.
3. En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n).

Enoncé 8: Suite définie par une intégrale.

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ de tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\dfrac{\ln 3}{3}$ ↘	0

1. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$
   a) Justifier que, si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.
   b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $F(x)=[\ln(x+3)]^2$.
   a) Déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Autres exercices

Exercice 1 : n° 71 du livre de la classe p. 337.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ ont pour équations respectives :
$y=f(x)$ avec $f(x)=x^2-2x-3$ et $y=g(x)$ avec $g(x)=-x^2+1$.

1. Tracer les courbes sur votre calculatrice.
2. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la surface limitée par les deux courbes.

Exercice 3 :

1. Démontrer que la suite (J_n) définie, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par $J_n=\int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}\,dt$ est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n=\int_1^n (t+1)e^{-t}dt$
   a) Justifier que, pour tout $t\geq 1$, on a $\sqrt{t+1}\leq t+1$.
   b) En déduire que $J_n\leq I_n$.
   c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
   d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 4 : Soit la suite d'intégrales $I_n=\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. Que peut-on en conclure ?
3. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=1-J_n$ avec $J_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq J_n\leq\dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$