TS Devoir Maison n°5 Donné le : mardi 13 décembre 2011
À rendre le : mercredi 11 janvier 2012

Consigne : une copie pour 2 élèves
Objectif : remédiation (sujet A), consolidation (sujet B) ou approfondissement (sujet C)
Thème : fonction exponentielle, équation différentielle.

- Sujet A - I- Etude d'une fonction

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 10)\,e^{-\frac{1}{2}x}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

1. a) Choisir la bonne réponse : soit u et v deux fonctions telles que $f = uv$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0^+$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$: a) $+\infty$; b) 0 ; c) on ne peut pas répondre.

   b) Etudier la limite de f en $+\infty$.
2. a) u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b sont deux réels.
   Compléter : la dérivée du produit uv est : $(uv)' =$
   la dérivée de e^{ax+b} est :
   b) Calculer $f'(x)$, pour x positif. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   A l'aide de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

II- Résolution d'une équation différentielle

On considère, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + \frac{1}{2}y = 20\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

1. a) f est la fonction de la partie I.
   Pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, calculer $f'(x) + \frac{1}{2}f(x)$. (on utilisera I2b).
   b) Que pouvez vous dire de f pour (E) ?
2. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$.
   a) Pour $x \in [0 ; +\infty[$, quelle relation entre $g'(x)$ et $g(x)$ pouvez vous écrire ?
   b) Montrer que la fonction $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
3. a) Déterminer toutes les fonctions h solutions de (E').
   b) Déduire alors de 2 b), l'expression des solutions de (E)
   c) Montrer que toute fonction définie comme dans la question 3b) est effectivement une solution de (E).

(L'ensemble des questions 2.b) et du paragraphe 3. auraient pu être remplacées par les deux questions suivantes :
Montrer que g-f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E). Résoudre (E') et résoudre (E).)

4. a) Déterminer la solution de (E) prenant la valeur 10 en 0.
   b) Que pouvez vous dire de f pour (E) ?

- Sujet B - I- Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2 solution de (E), qui, prend la valeur 2 en 0.

II- Etude d'une fonction particulière

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Etablir que l'équation $g(x) = -2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$.

III- Cas général

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel *x*.

   b) En déduire le tableau de variation de f_k.
3. a) Déterminer les coordonnées du point A_k de $\mathscr{C}_k$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_k$ en A_k soit parallèle à l'axe des abscisses

   b) Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points A_k lorsque *k* décrit $\mathbb{R}$?

   c) Construire $\mathscr{E}$ sur le graphique de la partie II.

- <u>Sujet C</u> - I- Résolution d'une équation différentielle

On note (E) : $y'+\frac{1}{\sqrt{3}}y=0$ et (E') : $y'+\frac{1}{\sqrt{3}}y=-5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\sin x$ deux équations différentielles sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E).
2. Montrer que la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\cos x$ est une solution particulière de (E')
3. Montrer que *f* est solution de (E') si et seulement si $f-u$ est solution de (E)
4. Résoudre (E').

II- Etude d'une fonction « pseudo-périodique »

Soit la fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\cos x$

1. a) Démontrer que : $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad |f(x)| \leq 5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$

   b) En déduire la limite de *f* en $+\infty$.
2. Démontrer que *f* est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que : $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad f'(x)=-\frac{10}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\cos(x-\frac{\pi}{3})$
3. Déterminer le signe de *f* ' sur $[0\,;2\pi]$
4. a) Démontrer que : $\forall x \in [0\,;+\infty[\quad f(x+2\pi)=e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}f(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de *f* sur $[0\,;4\pi]$
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la restriction de *f* à l'intervalle $[0\,;4\pi]$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
6. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $f_1(x)=5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$ et $f_2(x)=-5e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$

   On note $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ leurs représentations graphiques respectives dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

   a) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$ et démontrer qu'en ces points les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$ ont une tangente commune.

   b) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_2)$ et démontrer qu'en ces points les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$ ont une tangente commune.

   c) Tracer sur le graphique précèdent $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

III- Etude d'une suite

1. *x* est un réel fixé dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$, pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n(x)=f(x+2n\pi)$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(x)=e^{-\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}}f(x)$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique
2. On pose $S_n(x)=\sum_{j=0}^{n}u_j(x)$, calculer $S_n(x)$ en fonction de *n* et de *f*(*x*)
3. Déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$