

Approximations des nombres réels - TS

Extrait du bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011 : " Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts



Archimède est né à Syracuse (actuelle Sicile) vers 287 av. J.-C.

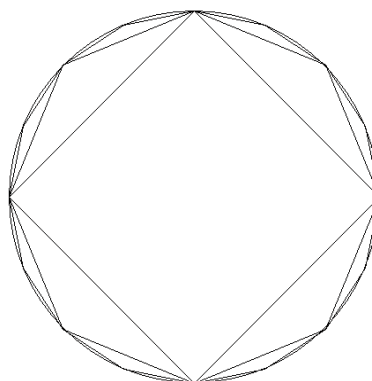
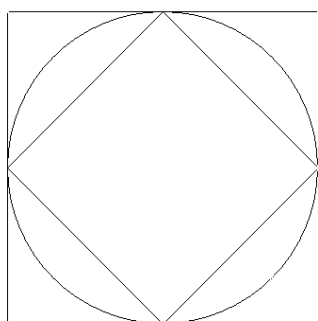
Il grandit dans un milieu scientifique, car son père est astronome. De bonne heure, il montre une vive passion pour les études qu'il fait sans doute à Alexandrie où il se lie d'amitié avec le célèbre Eratosthène de Cyrène, qui a calculé la circonférence de la Terre.

Revenu à Syracuse, il s'absorbe dans ses multiples recherches : mathématiques, physique, géométrie, mécanique, optique, astronomie,

Archimède

Domenico Fetti 1620

L'idée pour trouver une approximation π est la suivante : un cercle C de rayon 1 a pour circonférence 2π , on peut construire des polygones réguliers inscrits dans le cercle et circonscrits au cercle dont les périmètres successifs forment un encadrement de 2π . Par conséquent, leurs demi-périmètres seront des approximations de π .



On peut par exemple partir d'un carré P_0 de demi-périmètre noté p_0 inscrit dans un cercle puis doubler le nombre de ses côtés. On obtient alors un octogone P_1 de demi-périmètre noté p_1 puis, par doublements successifs du nombre de côtés, on obtient une suite croissante p_2, p_3, \dots qui tend vers π . On notera k_n le nombre de côtés du polygone P_n et c_n la longueur de chacun de ses côtés.

1) Combien valent k_0, c_0 et p_0 ?

2) Calculer k_1 et k_2 ? Conjecturer la valeur de k_n et démontrer votre résultat.

3) Quelle est la limite en $+\infty$ de k_n ?

4)

a) Montrer que $c_n^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right)$.

b) En déduire l'expression de c_{n+1}^2 .

c) Montrer que $\cos(a) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1$, pour tout réel a .

d) déduire de a), b) et c) que $c_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_{n-1}^2}}$.

(l'avantage de cette écriture étant de se détacher du calcul de cosinus)

5) a) Quel est le premier terme de cette suite ?

b) Montrer que (c_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut on en déduire sur la suite ?

c) Quelle est la limite de (c_n) en $+\infty$?

6) Déterminer l'expression de p_n en fonction de c_n et k_n .

7) A l'aide d'un tableur, déterminer le rang à partir duquel l'approximation de π par p_n est exacte à 10^{-8} près.

Remarque : la méthode d'Archimède est ici un peu transformée, la méthode originale consistait à encadrer le périmètre du cercle entre les demi-périmètres de polygones réguliers.

Si on note u_n et v_n les côtés des polygones réguliers à n côtés respectivement inscrits et circonscrits au cercle de rayon 1 (n entier supérieur ou égal à 3), par des considérations géométriques, on peut

montrer que $v_{2n} = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $u_{2n} = \sqrt{\frac{u_n v_{2n}}{2}}$.

8) Programmer sur un tableur le calcul des valeurs de u_n et v_n et trouver la valeur de n permettant d'avoir une aussi bonne approximation que celle trouvée par Archimède donnée par l'encadrement

$$\frac{220}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7} .$$